

並列型のマルコフ連鎖モンテカルロ法による項目反応モデルの母数推定に関する研究

著者	佐藤 喜一
号	1
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	教情博第4号
URL	http://hdl.handle.net/10097/59739

さ　　とう　　よし　　かず
佐　　藤　　喜　　一

学 位 の 種 類	博士（教育情報学）
学 位 記 番 号	教情博 第 4 号
学位授与年月日	平成 20 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研 究 科 ・ 専 攻	東北大学大学院教育情報学教育部（博士課程後期 3 年の課程） 教育情報学専攻
学 位 論 文 題 目	並列型のマルコフ連鎖モンテカルロ法による項目反応モデルの 母数推定に関する研究
論 文 審 査 委 員	（主査） 教 授 村 木 英 治 准教授 中 島 平 教 授 繁 榊 算 男 (東京大学)

〈 論 文 内 容 の 要 旨 〉

近年、マルコフ連鎖モンテカルロ法（Markov chain Monte Carlo, MCMC）は、多くの分野で複雑化している数理モデルのパラメータ推定法として注目を集めている。項目反応理論（item response theory, IRT）の分野でも MCMC に関する関心は高く、MCMC はさまざまな IRT モデルに適用されて成果があげられている。本論文は、IRT モデルの母数推定への応用を前提として、既存の MCMC アルゴリズムを並列化するアルゴリズムについて研究したものである。

本論文の目的のひとつは、Gelman, Roberts, & Gilks (1996) に示唆されたアイディアに基づく並列型の MCMC アルゴリズムを提案し、RWMH アルゴリズム (random-walk Metropolis-Hastings algorithm) における提案分布のスケール調整の自動化とマルコフ連鎖の収束判定の自動化を試みることである。提案アルゴリズムの新しい特徴は、提案分布のスケール調整とマルコフ連鎖の収束の確認が同時に完了し、その後ただちに有効なサンプルを得ることができる点である。また、本論文のもうひとつの目的は、提案アルゴリズムを IRT モデルの母数の推定に応用することである。本論文では、IRT モデルのひとつである Rasch モデルの項目困難度母数の推定に Parallel-SCRWMH アルゴリズム (parallel single-component random-walk Metropolis-Hastings algorithm) を

適用し、妥当な推定値が得られるかどうかを考察した。

第3章では、既存の MH アルゴリズム (Metropolis-Hastings algorithm) を並列化した MCMC アルゴリズムを提案し、RWMH アルゴリズムにおける提案分布のスケール調整の自動化とマルコフ連鎖の収束判定の自動化を試みた。本論文では、IRT モデルの母数の推定に関心があるので、提案アルゴリズムを拡張した Parallel-SCRWMH アルゴリズムに焦点を合わせて研究を進めることにした。3.3 節では、Parallel-SCRWMH アルゴリズムを 2 次元正規分布からのサンプリングに適用した。そして、Parallel-SCRWMH アルゴリズムにより適切なサンプリングが可能かどうかを調べるとともに、Parallel-SCRWMH アルゴリズムの適用範囲と限界についても考察した。その結果、現段階では、提案分布として正規分布を利用する Parallel-SCRWMH アルゴリズムを適用するには、確率変数間に強い相関がなく正規分布から形状が大きくかけ離れていない目標分布であることが適用条件になることがわかった。そして、その条件を満たす目標分布から、Parallel-SCRWMH アルゴリズムは SCRWMH アルゴリズム (single-component random-walk Metropolis-Hastings algorithm) とほぼ同等の精度でサンプリングできることがわかった。

第4章の目的は、Parallel-SCRWMH アルゴリズムを Rasch モデルの項目困難度母数の推定に適用し、妥当な推定値が得られるかどうかを確認することであった。そのため、4.6 節と 4.7 節では、シミュレートされたテストデータと現実のテストデータを用い、Rasch モデルの項目困難度母数を複数の手法でベイズ推定した。BILOG-MG による推定値、SCRWMH アルゴリズムによる推定値、Parallel-SCRWMH アルゴリズムによる推定値を比較し、Parallel-SCRWMH アルゴリズムにより妥当な推定値が得られるかどうかを考察した。その結果、Rasch モデルの項目困難度母数の推定において、Parallel-SCRWMH アルゴリズムを用いると SCRWMH アルゴリズムに非常に近い妥当な推定値が得られることがわかった。

第3章と第4章を通し、SCRWMH アルゴリズムと Parallel-SCRWMH アルゴリズムにおいてマルコフ連鎖が収束にいたるまでの計算コストは単純に比較できないことを指摘した。もし、提案分布のスケールを調整するための事前シミュレーションを含めて考えるなら、Parallel-SCRWMH アルゴリズムの計算コストは SCRWMH アルゴリズムと同等か、むしろ経験的に少なくても済むことも指摘した。さらに、並列処理が可能な環境なら、Parallel-SCRWMH アルゴリズムの計算時間は大幅に短縮が可能であることも指摘した。

以上の結果を総括すると、つぎのような本論文の結論が導かれる。得られた結論から、本論文の目的は一定の達成をみたものと考えられる。

1. 提案アルゴリズムにより、RWMH アルゴリズムにおける提案分布のスケール調整の自動化とマルコフ連鎖の収束判定の自動化を実現できる。
2. 提案分布として正規分布を利用する Parallel-SCRWMH アルゴリズムを用いると、確率変

数間に強い相関がなく正規分布から形状が大きくかけ離れていない目標分布から SCRWMH アルゴリズムと同等の精度でサンプリングできる。

3. 提案分布のスケールを調整するための事前シミュレーションを含めて考えると、Parallel-SCRWMH アルゴリズムにおけるマルコフ連鎖が収束にいたるまでの計算コストは SCRWMH アルゴリズムと同等か、むしろ経験的に少なく済む。
4. Parallel-SCRWMH アルゴリズムは、Rasch モデルの項目困難度母数の推定に利用できる。

〈論文審査の結果の要旨〉

博士論文審査会（最終試験）は、2008 年 2 月 6 日 13：00 より、文科系総合研究棟（教育学研究科）203 教室にて実施された。まず、論文提出者の佐藤喜一から研究内容についての発表が 60 分程度あった。そのあと、30 分程度の質疑応答があった。繁樹教授からは、おもに論文で示されているマルコフ連鎖の収束判定法に関連する質問やマルコフ連鎖を並列に走らせることの意義についてコメント等がなされた。中島准教授からは、既存のアルゴリズムに対する提案アルゴリズムのメリットに関連する質問や MCMC により得られた母数の推定結果がまちがっていることはないのか、という点についての質問がなされた。指導教員村木教授からは、今後は Rasch モデルだけではなく、たとえば多次元 IRT モデルのような複雑なモデルへの提案アルゴリズムの適用を検討すべきだというコメントが出された。これらの質問やコメントに対し、佐藤君はおおむね適切な対応をした。

論文審査会における口頭発表および論文の内容に関して、佐藤喜一退席の後、審査委員 3 名によってその可否を審議した。審議の結果、佐藤喜一の博士論文は合格のレベルに達しているという合意がなされた。よって、本論文は博士（教育情報学）の学位論文として合格と認める。